1) (i) $V=\{(x,y) \mid x,y\in \mathbb{R}\}$

$(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=\left((x_1^3+x_2^3)^{1/3},\ (y_1^3+y_2^3)^{1/3}\right)$

$a\odot(x_1,y_1)=(ax_1,ay_1)$

Πράξεις καλά ορισμένες

$\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$

$(\kappa+\lambda)\odot(x_1,y_1)=\kappa\odot(x_1,y_1)\oplus\lambda\odot(x_1,y_1)$

$((\kappa+\lambda)x_1,(\kappa+\lambda)y_1) \qquad (\kappa x_1,\kappa y_1)\oplus(\lambda x_1,\lambda y_1)$

$\left((\kappa^3x_1^3+\lambda^3x_1^3),(\kappa^3y_1^3+\lambda^3y_1^3)\right)=\left(\sqrt[3]{(\kappa^3+\lambda^3)x_1^3},\ \sqrt[3]{(\kappa^3+\lambda^3)y_1}\right.$

$= \left(\left(\sqrt[3]{\kappa^3+\lambda^3}\right)x_1, \left(\sqrt[3]{\kappa^3+\lambda^3}\right)y_1\right)$ (++)

$((\kappa+\lambda)x_1, (\kappa+\lambda)y_1)$ Επειδή $\kappa+\lambda \neq \sqrt[3]{\kappa^3+\lambda^3}$.

$(\sqrt[3]{\kappa^3+\lambda^3}\, x_1, (\sqrt[3]{\kappa^3+\lambda^3})y_1)$ Αυτά δεν είναι ίσα.

Άρα το V με αυτές τις πράξεις δεν είναι δ.χ.

(iii) $V=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$

$(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2) = ((x_1^3+x_2^3)^{y_1}, (y_1^3, y_2^3)^{y_2})$

$a\odot(x_1,y_1)=(\sqrt[3]{a}\,x_1, \sqrt[3]{a}\,y_1)$

Οι πράξεις είναι καλά ορισμένες, αφού η τρίτη ρίζα σέβεται τα πρόσημα.

Ας εξετάσουμε αν η αντιμεταθετική ιδιότητα ισχύει.

$(\kappa+\lambda)\odot(x,y) = ((\sqrt[3]{\kappa+\lambda})x, (\sqrt[3]{\kappa+\lambda})y)$

$\kappa\odot(x,y)\oplus\lambda\odot(x,y) = (\sqrt[3]{\kappa}\,x, \sqrt[3]{\kappa}\,y)\oplus = (\sqrt[3]{\lambda}\,x, \sqrt[3]{\lambda}\,y)$

Βλέπουμε ότι ισχύει

Εξετάζουμε όλες τις υπόλοιπες ιδιότητες.

1) $((x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2))\oplus(x_3,y_3) = (x_1,y_1)\oplus((x_2,y_2)\oplus(x_3,y_3))$

2) Ουδέτερο-μηδενικό στοιχείο είναι το $(0,0)$: $(x,y)\oplus(0,0)=(0,0)\oplus(x,y)=(x,y)$

3) Το αντίθετο του (x,y) είναι το στοιχείο $(-x,-y)$.

4) $(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(x_2,y_2)\oplus(x_1,y_1)$

Κ' τις υπόλοιπες τρεις ιδιότητες

2) $W=\{(x,y,z)\mid 3x+5y-5z=0\}\subseteq\mathbb{R}^3$

$(x,y,z),(x',y',z')\in W$

$3x+5y-5z=0$ κ' $3x'+5y'-5z'=0$

κ' θέλουμε ισχύει.

$(x,y,z)+(x',y',z')\in W \Leftrightarrow (x+x', y+y', z+z')\in W \Leftrightarrow 3(x+x')+5(y+y')-5(z+z')=0$

3) $M(2\times 2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\}$

(i) $W = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \leq M(2\times 2, \mathbb{R})$ είναι υπόχωρος;

Ισχύουν οι 2 ιδιότητες του υπόχωρου

(ii) $W' = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\alpha' & \beta+\beta' \\ \beta+\beta' & \gamma+\gamma' \end{pmatrix} \in W$

$r \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\alpha & r\beta \\ r\beta & r\gamma \end{pmatrix} \in W'$

(iv) $2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$

$2 \neq \emptyset \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in 2$

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ 0 & \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\alpha' & \beta+\beta' \\ 0 & \gamma+\gamma' \end{pmatrix} \in 2$

$r \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in 2$

(iii) $W' = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \middle| \text{ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος} \right\}$

$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \neq 0 \iff \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W' \Rightarrow W' \neq \emptyset$

Το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης των πινάκων $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν ανήκει στο W'

$\left. \begin{array}{l} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in W' \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin W'$

Άρα η πρόσθεση δεν είναι καλά ορισμένη στο W'

Αλλά ούτε κ' το μηδενικό στοιχείο

$$0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\notin W$$

4) $F[0,1]=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\}$ με τις κανονικές πράξεις των συναρτήσεων

(i) $W=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid f(0)=f(1)\}$

$f(x)=0,\ \forall x\in[0,1] \Rightarrow f\in W\neq\emptyset$

$f,g\in W \Rightarrow f+g\in W \Leftrightarrow (f+g)(0)=(f+g)(1) \Leftrightarrow f(0)+g(0)=f(1)+g(1)$ ισχύει

$f(0)=f(1) \Rightarrow rf(0)=rf(1) \Rightarrow rf\in W$

(ii) $W'=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid f(0)+f(1)=\frac{1}{2}\}$

$f(x)=\frac{1}{4} \Rightarrow f\in W'\neq\emptyset$

$f(x)+f(x)=2f(x)=\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}2f(0)=\frac{1}{2}\\ 2f(1)=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\ 2f(0)+2f(1)=1\neq \Rightarrow \overset{f(x)+f(x)}{\overbrace{2f(x)}}\notin W'$$

$f(x)=\frac{1}{4}\in W'$ θα πρέπει $f(x)+f(x)\in W'$. Αλλά δεν ισχύει

$W''=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid f(0)+f(1)=f(\frac{1}{2})\}$

$f(x)=0 \Rightarrow f\in W''\neq\emptyset$

$f,g\in W'' \Rightarrow f+g\in W''$

Έστω $h(x)=f(x)+g(x) \Rightarrow h(0)=f(0)+g(0)$

$h(1)=f(1)+g(1)$

$$\Rightarrow h(0)+h(1)=f(0)+g(0)+f(1)+g(1)$$

$g(\frac{1}{2})$

$f(\frac{1}{2})$

$h(0)+h(1)=f(1/2)+g(1/2)=h(1/2)$

$af(x)\in W$ $\qquad af(0)+af(1)=a(f(0)+f(1))=af(1/2) \Rightarrow$ ισχύει

5) $(4,3,8) \; (*) = \alpha(4,1,0)+\beta(2,1,2)+\gamma(2,0,-2)$

Βρείτε $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η $(*)$

$4=4\alpha+2\beta+2\gamma \Rightarrow 2=2\alpha+\beta+\gamma.$

$3=\alpha+\beta \qquad\qquad 3=\alpha+\beta$

$8=2\beta-2\gamma \qquad\qquad 4=\beta-\gamma$

$\beta=4+\gamma$

$\alpha=3-\beta=3-4-\gamma=-1-\gamma.$

$2=-2-2\gamma+4+\gamma+\gamma \Rightarrow 0=0,\ \gamma\in\mathbb{R}$

$\gamma=1 \Rightarrow \beta=5,\ \alpha=-2$

$(4,3,8)=-2(4,1,0)+5(2,1,2)+(2,0,-2)$

$\boxed{\gamma\neq 0}$

Από την πρόταση που λέει ότι η αναπαράσταση διανύσματος ως προς βάση (γεννά + γρ. ανεξ) είναι μοναδική έχουμε ότι το $\{(4,1,0),(2,1,2),(2,0,-2)\}$ είναι γρ. ανεξ.

6) $3x^2=\alpha x+\beta(x^2+1)+\gamma(2x-3)+\delta(2x-4)$ διάσταση 3, άρα γρ. εξαρτ.

Βρισκόμαστε στον $\mathbb{R}_2[x]$ με διάσταση 3. Άρα τα 4 διανύσματα που μας δίνει δεν μπορεί να είναι γρ. ανεξ.

$\{x, x^2+1, 2x-3, 2x-4\}$

$3=\beta$

$0=\alpha+2\gamma+\delta \Rightarrow \alpha=2\gamma-2\delta=2-\frac{8}{3}\delta-2\delta=2-\frac{14}{3}\delta$

$0=\beta-3\gamma-4\delta \Rightarrow 3=3\gamma+4\delta \Rightarrow \gamma=1-\frac{4}{3}\delta \quad \delta\in\mathbb{R}$

Για $\delta=1 \Rightarrow \beta=3, \gamma=-\frac{1}{3}, \alpha=-\frac{5}{3}$

Να εξετάσουμε αν το $\{x, x^2+1, 2x-3\}$. Αν είναι γρ. ανεξ., τότε θα είναι βάση του $\mathbb{R}_2[x]$.

$0=\alpha x+\beta(x^2+1)+\gamma(2x-3)$

$\beta=0$

$\alpha+\beta+2\gamma=0 \Rightarrow \alpha=0$

$\beta-3\gamma=0 \Rightarrow \gamma=0$

7) $\alpha u+\beta v+\gamma w=\bar{0} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$

$\kappa u+\lambda(u+v)+\mu(u+v+w)=\bar{0}$

$(\kappa+\lambda+\mu)u+(\lambda+\mu)v+\mu w=\bar{0}$ ⊕

$\mu=0$ κ' $\lambda+\mu=0$ κ' $\kappa+\lambda+\mu=0$

Γραμμικές Απεικονίσεις

$T: V^n \to W^m$

Μια γρ. απεικόνιση από το δχ. V διάστασης n στο δχ W διάστασης m ικανοποιεί την ιδιότητα $T(\alpha u+\beta v)=\alpha T(u)+\beta T(v)$

Αν επιπλέον είναι 1-1, θα καλείται μονομορφισμός

Αν είναι επί, θα καλείται επιμορφισμός.

Αν είναι γρ. 1-1 κ' επί θα καλείται ισομορφισμός κ' θα γράφουμε

$T: V^n \xrightarrow{\cong} W^m$

π.χ. Δ.ο. η $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ με τύπο $T(\alpha, \beta, \gamma)=\alpha(x^2+x)+\beta(x+1)+\gamma(x^2+2)$ είναι $\cong$.

$T((\alpha,\beta,\gamma)+(\alpha',\beta',\gamma'))=T(\alpha+\alpha', \beta+\beta', \gamma+\gamma')$

$(\alpha+\alpha')(x^2+x)+(\beta+\beta')(x+1)+(\gamma+\gamma')(x^2+2)=T(\alpha,\beta,\gamma)+T(\alpha',\beta',\gamma')$

$\kappa T(\alpha,\beta,\gamma)=\kappa\alpha(x^2+x)+\kappa\beta(x+1)+\kappa\gamma(x^2+2)=T(\kappa\alpha,\kappa\beta,\kappa\gamma)$

T είναι 1-1 $\Leftrightarrow \ker T=\{(0,0,0)\}$

$T(\alpha,\beta,\gamma)=0$ μηδενικό πολ/μο

$\quad\; \shortparallel$

$\alpha(x^2+x)+\beta(x+1)+\gamma(x^2+2)=0$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\gamma=0 \\ \alpha=0 \\ \beta+2\gamma=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\gamma=0 \\ \beta=0\end{array}\right\} \Rightarrow \ker T=\{(0,0,0)\}$$

T 1-1.

T επί $\Leftrightarrow \forall f(x)\in \mathbb{R}_2[x]\ \exists (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ με $T(\alpha,\beta,\gamma)=f(x)$

Έστω $f(x)=\kappa x^2+\lambda x+\mu$ τυχαίο.

Θέλουμε $T(\alpha,\beta,\gamma)=\kappa x^2+\lambda x+\mu$ $\quad \alpha(x^2+x)+\beta(x+1)+\gamma(x^2+2)=\kappa x^2+\lambda x+\mu$

Ζητάμε τα α,β,γ συναρτήσει των δοσμένων κ,λ,μ.

$\alpha+\gamma=\kappa \Rightarrow \alpha=\kappa-\gamma$

$\alpha+\beta=\lambda \Rightarrow \kappa-\gamma+\beta=\lambda \Rightarrow \beta=\lambda-\kappa+\gamma$

$\beta+2\gamma=\mu \Rightarrow \lambda-\kappa+\gamma+2\gamma=\mu \Rightarrow \gamma=\dfrac{\kappa-\lambda+\mu}{3}$

$3\gamma=\kappa-\lambda+\mu \Rightarrow$

$$\gamma=\frac{\kappa-\lambda+\mu}{3}$$

$$\beta=\lambda-\kappa+\gamma=\frac{3\lambda-3\kappa+\kappa-\lambda+\mu}{3}=\frac{2\lambda-2\kappa+\mu}{3}$$

$$\alpha=\kappa-\gamma=\frac{3\kappa-\kappa+\lambda-\mu}{3}=\frac{2\kappa+\lambda-\mu}{3}$$

Αν $T: V^n\to W^m$ γρ $\Rightarrow T(V)\le W$

$\ker T\le V$

π.χ. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ με τύπο $T(x,y)=(0,0,0)$

Η T είναι γρ. $\ker T=\mathbb{R}^2$ $\quad T(\mathbb{R}^2)=\{(0,0,0)\}$

Ερώτημα: Μια γρ. απεικ. δέδεται των γρ. αυτής;

Θεώρημα: Έστω $T, T': V^n\to W^m$ δύο γρ. απεικ. κ' $\langle v_1,\dots,v_n\rangle$ μια διατεταγμένη βάση του V^n.

Τότε $T=T' \Leftrightarrow T(v_1)=T'(v_1),\ T(v_2)=T'(v_2),\ T(v_n)=T'(v_n)$.

Απόδειξη: $\tau = \tau' \Rightarrow \tau(v) = \tau'(v) \ \forall v \in V$

$\tau(v_1) = \tau'(v_1), \dots, \tau(v_n) = \tau'(v_n) \Rightarrow \tau = \tau'$ αρκεί $\tau(v) = \tau'(v) \ \forall v \in V$

Άρα αν τυχαίο $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$

$\tau(v) \overset{\gamma\rho}{=} a_1 \tau(v_1) + a_2 \tau(v_2) + \dots + a_n \tau(v_n) = a_1 \tau'(v_1) + a_2 \tau'(v_2) + \dots + a_n \tau'(v_n)$

$\overset{\gamma\rho}{=} \tau'(v)$

Θεώρημα: Έστω V κ' W δύο δ.χ. διάστασης n κ' διατεταγμένες βάσεις $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ κ' $\langle w_1, \dots, w_n \rangle$. Τότε $\exists$ μοναδική γρ. απεικ. $\tau: V \to W$ με $\tau(v_i) = w_i$ για $i = 1, \dots, n$. Κ' αυτή είναι $\cong$ ισομορφισμός.

Απόδειξη: Ορίζουμε την $\tau: V \to W$ ως εξής: $\tau(v_1) = w_1, \dots, \tau(v_n) = w_n$ κ' γραμμικότητα.

Δηλαδή $\tau(av + bv) = a\tau(v) + b\tau(v) \ \forall u, v \in V$ κ' $a, b \in \mathbb{R}$

Τυχαίο $v \in V \Rightarrow$

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$

$\tau(v) = \tau(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = a_1 \tau(v_1) + a_2 \tau(v_2) + \dots + a_n \tau(v_n) =$

$= a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n$

Είναι η τ 1-1 κ' επί;

$1\text{-}1 \Leftrightarrow \ker \tau = \{\bar{0}_V\}$

Έστω $v \in V$ με $\tau(v) = \bar{0}_V$

$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \Rightarrow$

$\tau(v) = a_1 \tau(v_1) + \dots + a_n \tau(v_n) = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n = \bar{0}_W \Big\} \Rightarrow$

$\langle w_1, \dots, w_n \rangle$ γρ. ανεξ.

$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \Rightarrow v = \bar{0}_V$

Επί: $\forall w \in W \ \exists v \in V$ με $\tau(v) = w$

$w = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n = a_1 \tau(v_1) + \dots + a_n \tau(v_n) \overset{\gamma\rho}{=} \tau(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = \tau(v)$

με $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

Πόρισμα: Κάθε πραγματικός δ.χ. διάστασης n είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή $\exists$ ισομορφισμός $T: V \to \mathbb{R}^n$. $\mathbb{C}^n$

Πόρισμα: Έστω V κ' W δύο πεπερασμένης διάστασης δ.χ. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα

1) $V \cong W$ ($T: V \xrightarrow{\cong} W$) $\Downarrow$
2) $\dim V = \dim W$ $\Uparrow$

Απόδειξη: Έστω $\dim V = n$ κ' $\dim W = m$

$\dim V = n \Rightarrow V \cong \mathbb{R}^n$

$\dim W = m \Rightarrow W \cong \mathbb{R}^m$

Έστω $n \neq m$ κ' $n > m$

Έστω ότι $\exists\, T: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m$

$\{T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)\}$ αυτά είναι $n > m$

Άρα δεν μπορεί να είναι γρ. ανεξ.

Άρα δεν μπορεί να είναι βάση. Δηλαδή η T δεν είναι 1-1.

Θεώρημα: Έστω $T: V^n \to W^m$ γρ. απ.

Τα επόμενα είναι ισοδύναμα

1) T είναι 1-1
2) T είναι επί
3) T είναι ισομορφισμός
4) T απεικονίζει βάση σε βάση

Απόδειξη: $T \cong \Rightarrow$ 1-1, επί

T απεικονίζει βάση σε βάση $\Rightarrow T \cong$

T 1-1 $\Rightarrow T$ απεικονίζει βάση σε βάση

Έστω $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ μια διατ. βάση κ' T 1-1

$\langle T(v_1), \dots, T(v_n) \rangle \leq W$.

Υποθέτουμε ότι τα $T(v_1), \dots, T(v_n)$ δεν είναι γρ. ανεξ.

$\exists\, a_1, \dots, a_n$ όχι όλα μηδέν ώστε $a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n) = \bar{0}$ T γρ.

$T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = \bar{0} \Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in \operatorname{Ker} T$ Άτοπο $\operatorname{Ker} T = \{\bar{0}\}$

Άρα $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ γρ. ανεξ κ' είναι ακριβώς $n = \dim V$. Άρα αποτελούν βάση.

T επι $\Rightarrow T$ 1-1

Αν T δεν είναι 1-1 $\Rightarrow \exists v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ με $T(v) = \bar{0}$

Τότε το στοιχείο $a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$ δεν είναι εικόνα κανενός $v \in V$, άτοπο

<u>Πρόταση</u>: Έστω $T: V^n \to W^m$ γρ. απεικ. Έστω $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ μια βάση του V, τότε

$T(V) = \langle T(v_1), \dots, T(v_n) \rangle$ <u>γενιάται</u>

<u>Απόδειξη</u>:

Έστω $w \in T(V)$ δηλαδή $\exists v \in V$ με $T(v) = w$

$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \Rightarrow T(v) \overset{\text{γρ}}{=} a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n)$, δηλαδή $w \in T(V)$

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Προσοχή: Το σύνολο $T(u) = \bar{0}$ $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ μπορεί να <u>μην</u> είναι γρ. ανεξ.

Π.χ. Δίνεται η γρ. απεικ

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ με τύπο $T(x, y, z) = (x-y, x+y, x, y, x)$

Να εξετάσετε αν η T είναι 1-1, επι.

Να βρεθεί βάση του πυρήνα κ' της εικόνας.

<u>Απόδειξη</u>: Η T δεν μπορεί να είναι επι $T(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^5$

$\langle T(e_1), T(e_2), T(e_3) \rangle = \langle T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1) \rangle$

$\ker T \ni (x, y, z)$ τυχαίο

$T(x, y, z) = (0,0,0,0,0)$

$(x-y, x+y, x, y, x) = (0,0,0,0,0)$

$x - y = 0$

$x + y = 0$

$x = 0$

$y = 0$

$\ker T = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

$(0,0,z) = z(0,0,1)$

$\ker T = \langle (0,0,1) \rangle$

$\dim \ker T = 1$

$\tau(\mathbb{R}^3) = \langle \tau(e_1), \tau(e_2), \tau(e_3) \rangle$

δεκάται

$= \langle \tau(1,0,0), \tau(0,1,0), \tau(0,0,1) \rangle$

$= \langle (1,1,1,0,1), (-1,1,0,1,0), (0,0,0,0,0) \rangle$

$\tau(\mathbb{R}^3) = \langle (1,1,1,0,1), (-1,1,0,1,0) \rangle$ είναι αυτοί γρ. ανεξ.

Αν και τότε να αποτελούν βάση του $\tau(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim \tau(\mathbb{R}^3) = 2$

$\dim \ker \tau = 1$

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$